

## **Екзаменул уник де стат ла МАТЕМАТИКЭ**

### **Варианта демонстративэ материалелор де апречиере а куноштинцелор пентру реализаря ын анул 2018 экзаменулуй уник де стат ла МАТЕМАТИКЭ**

#### **Експликаций ла варианта демонстративэ а материалелор де апречиере пентру ЕУС ла математикэ анулуй 2018**

Варианта демонстративэ есте дестинатэ пентру а да о ынкипуире деспре структура виитоарелор материале де апречиере, деспре кантитатя ынсэрчинэрилор, деспре форма лор ши нивелул де комплекситате.

Ынсэрчинэриле вариантэй демонстративе ну рефлектэ тоате ынтребэриле концинутулуй, каре пот фи инклусе ын материалеле де апречиере ын анул 2018. Структура лукрэрий есте датэ ын спечификацие, яр листа ынтребэрилор – ын кодификаторий элементелор концинутулуй ши черинцелор кэтре нивелул прегэтирей а абсолвенцилор организациилор де ынвэцэмынт ла реализаря экзаменулуй уник де стат анулуй 2018 ла математикэ.

Лукраря де экзаминаре есте форматэ дин доуэ пэрць, каре диферэ ын концинут, комплекситате ши нумэрул де ынсэрчинэрь. Индичиул стабилит фиекэрей пэрць а лукрэрий есте форма ынсэрчинэрилор:

- партя 1 концине 11 ынсэрчинэрь (ынсэрчинэриле 1–11) ку рэспунс скурт;
- партя 2 концине 4 ынсэрчинэрь (ынсэрчинэриле 12–15) ку рэспунс скурт ши шасе ынсэрчинэрь (ынсэрчинэриле 16–21) ку рэспунс десфэшурат.

Дупэ нивелул де комплекситате ынсэрчинэриле се репартизияэ ын фелул урмэтор: ынсэрчинэриле 1–11 ау нивел де базэ, ынсэрчинэриле 12–19 – нивел ридикат, ынсэрчинэриле 20 ши 21 се реферэ ла нивелул ыналт де комплекситате.

Ынсэрчинэриле примей пэрць сынт дестинате пентру детерминаря компетенцелор математиче але абитуриенцилор организациилор де ынвэцэмынт, че реализязэ програмеле ынвэцэмынтулуй женерал медиу (комплет) ла нивел де базэ.

Ынсэрчинаря ку рэспунс скурт (1-15) се сокоате ындеплинитэ, дакэ ын формуларул ку рэспунсурь № 1 есте фиксат рэспунсул корект ын формэ де нумэр ынтрег сау фракцие зечималэ финитэ.

Ынсэрчинэриле 16–21 ку рэспунс десфэшурат, динтре каре патру ынсэрчинэрь ку нивел ридикат ши доуэ ынсэрчинэрь ку нивел ыналт де комплекситате, сынт дестинате пентру о диференциере май пречисэ а абитуриенцилор институциилор де ынвэцэмынт супериор.

Резолваря коректэ а фиекэрей дин ынсэрчинэриле 1-15 есте естиматэ ку ун пункт.

Резолваря коректэ фиекэрей дин ынсэрчинэриле 16 - 17 есте естиматэ ку 2 пункте; 18 ши 19 — 3 пункте; 20 ши 21 — 4 пункте. Пунктажул максимал примар пентру ындеплиниря лукрэрий – 33 пункте.

Пентру фиекаре ынсэрчинаре ку рэспунс десфэшурат, инклусэ ын варианта демонстративэ, се пропуне о резолваре дин челе посибиле.

Критерииле презентате де евалуаре пермит сэ ынцележець черинцеле привинд деплинэтатя ши коректитудиня резолвэрилор.

Варианта демонстративэ а материалелор де апречиере, системул де евалуаре, спецификация ши кодификаторий вор ажута сэ елабораць стратегия де прегэтире кэтре ЕУС ла математикэ.

### **Инструкциунь ла ындеплиниря лукрэрий**

Лукраря де экзаминаре есте алкэтуитэ дин доуэ пэрць, инклузынд ын сине 21 ынсэрчинэрь.

Партя 1 концине 11 ынсэрчинэрь ла нивел де базэ де комплекситате ку рэспунс скурт.

Партя 2 концине 4 ынсэрчинэрь ла нивел ридикат де комплекситате ку рэспунс скурт ши 6 ынсэрчинэрь ла нивел ридикат ши ыналт де комплекситате ку рэспунс десфэшурат.

Ла ындеплиниря лукрэрий де экзаминаре ла математикэ се атрибуе 3 оре 55 минуте (235 минуте).

Рэспунсуриле ла ынсэрчинэриле 1–15 се скриу ын формэ де нумэр ынтрет сау фракцие зечималэ финитэ.

Нумереле скриець ын кымпуриле рэспунсурилор ын текстул лукрэрий, яр апой ле трансфераць ын формуларул ку рэспунсурь №1.

Рэспунс: -0,8.

Ла ындеплиниря ынсэрчинэрилор 16–21 се чере де скрис резолваря комплетэ ши рэспунсул ын формуларул ку рэспунсурь № 2.

Тоате формулареле ЕУС се ындеплинеск ку чернялэ нягрэ апринсэ.

Се пермите фолосиря пиксурилор капиларе, ку жел сау ку пеницэ. Ла ындеплиниря ынсэрчинэрилор се поате фолоси макулаторул. Ынскриериле ын макулатор ну се яу ын консидерацие ла апречиеря лукрэрий.

Пунктеле, акумулате де кэтре Думнявоастрэ пентру ынсэрчинэриле ындеплините, се сумязэ. Стэруици-вэ сэ ындеплиниць кыт май мулте ынсэрчинэрь ши сэ акумулаць чел май маре пунктаж.

***Вэ дорим сукчес!***

## Партя 1

Рэспунсул ла ынсэрчинэриле 1–11 есте нумэр ынтрег сау фракције зечималэ финитэ. Рэспунсул требуе скрис ын **ФОРМУЛАРУЛ КУ РЭСПУНСУРЬ № 1** ын партя дряптэ де ла нумэрул ынсэрчинэрий ындеплините, ынчепынд ку примул пэтрэцел. Фиекаре цифрэ, семн минус ши виргулэ скриець ын пэтрэцел апарте ын кореспундере ку моделеле арэтате ын формулар. Унитэциле де мэсурэ ну требуе де скрис.

### 1. Челе май симпле проблеме

Вара ун килограм де кэпшуне костэ 75 рубле. Маша а кумпэрат 2 кг 200 г де кэпшуне. Кыте рубле рест еа ва прими дин 200 рубле?

*Резолваре.*

$75 \cdot 2,2 = 165$  (рубле) костэ кэпшунеле.

$200 - 165 = 35$  (рубле) ва прими рест.

*Рэспунс:* 35.

### 2. Проблема ла проченте

Ын шкоалэ сынт 800 елевь, динтре ей 30% — елевь ай школий примаре. Принтре елевий школий медий ши супериоаре 20% ынвацэ лимба жерманэ. Кыць елевь ын шкоалэ ынвацэ лимба жерманэ, дакэ ын шкоала примарэ лимба жерманэ ну се ынвацэ?

*Резолваре.*

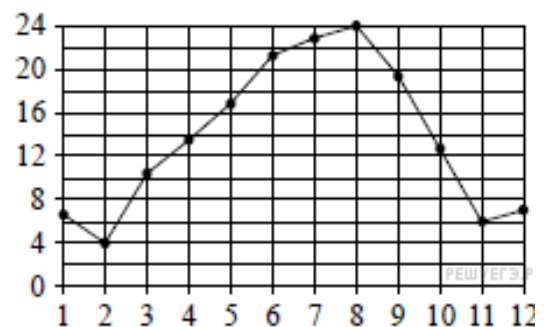
Елевь ай школий примаре  $800 : 0,3 = 240$ , яр елевь ай школий медий ши супериоаре —  $800 - 240 = 560$ . Деч, лимба жерманэ ын шкоалэ ынвацэ

$560 \cdot 0,2 = 112$  елевь.

*Рэспунс:* 112.

### 3. Читиря графичелор ши диаграмелор

Пе десен прин пункте есте арэтатэ температура медие а аерулуй ла Сочи пентру фиекаре лунэ а анулуй 1920. Пе оризонтал се индикэ луниле, пе вертикал — температура ын граде Челсиус. Пентру конкретизаре пунктеле сынт уните ку о линие.



Кыте лунь температура медие ера май маре де 18 граде Челсиус?

*Резолваре.*

Дин график се веде, кэ температура медие лунарэ ера май ыналтэ де 18 граде Челсиус пе паркурсул а патру лунь дин юние пынэ ын септембрие.

*Рэспунс:* 4.

### 4. Лукрул ку формулеле

Лежа а доуа а луй Ньютон поате фи скрисэ ын форма  $F=ma$ , унде  $F$  — форца (ын ньютонь), че акционязэ асупра корпусулуй,  $m$  — маса луй (ын килограме),  $a$  — акчелерация, ку каре се мишкэ корпус (ын  $m/s^2$ ). Гэсиць  $m$ , дакэ  $F=84$ ,  $a=12$ .

*Резолваре.*

$$m = F: a \quad m = 84:12 = 7$$

Рэспунс: 7.

### 5. Реця патратэ, планул де координате

Пе о фоае ын пэтрэцеле ку мэримя пэтрэцелулуй 1 чм × 1 чм есте арэатат ун триунгь. Гэсиць ария луй. Рэспунсул ыл даць ын чм<sup>2</sup>.

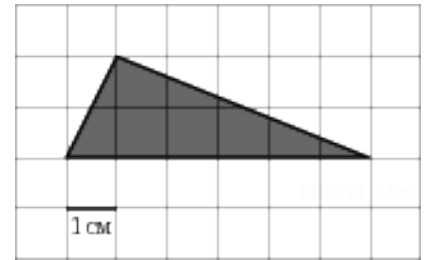
**Резолваре.**

Ария триунгюлуй есте егалэ ку жумэтате дин продусул базей ла ынэлцимя, дусэ ла база датэ.

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6 \text{ чм}^2.$$

Потривит ачестуй фапт

Рэспунс: 6.



### 6. Елементе але теорией пробабилитэцилор

Ын кулежеря де билете ла биоложие де тот сынт 25 билете. Нумай ын доузэ билете се ынтылнеште ынтребаря деспре чуперчь. Ла экзамен елевул скоате ун билет алес ла ынтымпларе дин ачастэ кулежеря. Гэсиць пробабилитатя кэ ын ачест билет ва фи ынтребаре деспре чуперчь.

**Резолваре.**

Дин 25 билете 2 концин ынтребаре деспре чуперчь, дин ачастэ каузэ пробабилитатя, кэ ын билетул алес ла ынтымпларе ла экзамен ва фи ынтребаре

деспре чуперчь, есте егалэ ку  $\frac{2}{25} = 0,08$ .

Рэспунс: 0,08.

### 7. Екуаций симпле

Гэсиць рэдэчина екуацией  $3^{x-5} = 81$ .

**Резолваре.**

Тречем путериле ла ачеяш базэ:

$$3^{x-5} = 81 \Leftrightarrow 3^{x-5} = 3^4 \Leftrightarrow x - 5 = 4 \Leftrightarrow x = 9.$$

Рэспунс: 9.

### 8. Планиметрия : проблеме , легате ку унгиориле

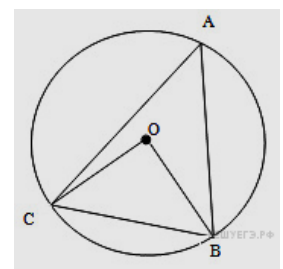
Триунгюл ABC есте ынскрис ын чиркумферинцэ ку чентрул O. Унгиюл BAC есте егал ку 32°. Гэсиць унгиюл BOC. Рэспунсул ыл даць ын граде.

**Резолваре.**

Унгиюл ынскрис есте егал ку жумэтате дин аркул, пе каре ел се сприжинэ, яр унгиюл де ла чентру есте егал ку аркул, пе каре ел се сприжинэ.

Дин ачастэ каузэ унгиюл де ла чентру BOC есте де доузэ орь май маре декыт унгиюл ынскрис BAC (везь дес.). Ын аша мод, есте егал ку 64°.

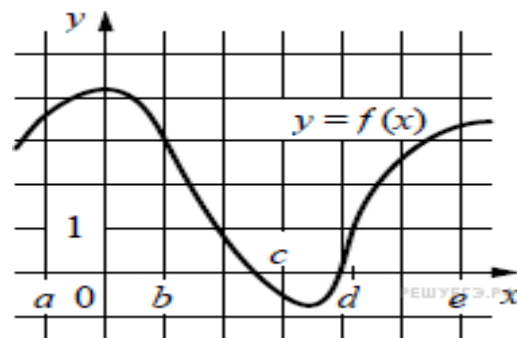
Рэспунс: 64.



### 9. Анализа графичелор ши диаграмелор

Пе десен есте арэатат графикул функцией  $y = f(x)$ . Нумереле  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  ши  $e$  ымпарт акса  $x$  ын патру интервале. Фолосинд графикул, пунець ын кореспундере фиекэруй интервал карактеристика функцией сау дериватей ей.

Май жос сынт индикате валориле дериватей ын пунктеле дате. Фолосинд графикал, пунець ын кореспонденцэ фиекэруй пункт валоаря дериватей ын ел.



**ПУНКТЕЛЕ**

**ВАЛОРИЛЕ ДЕРИВАТЕЙ**

- А)  $(a; b)$  1) деривата есте негативэ пе тот интервалул  
 Б)  $(b; c)$  2) деривата есте позитивэ ла ынчепутул интервалулуй ши негативэ ла сфыршитул интервалулуй  
 В)  $(c; d)$  3) функция есте негативэ ла ынчепутул интервалулуй ши позитивэ ла сфыршитул интервалулуй  
 Г)  $(d; e)$  4) деривата есте позитивэ пе тот интервалул

Скриець ын рэспунс цифреле, аранжынду-ле ын ординя, кореспунзэтор литерелор:

А	Б	В	Г

*Експликацие.*

Дакэ функция креште, атунч деривата есте позитивэ ши инверс.

Пе интервалул  $(a;b)$  деривата есте позитивэ ла ынчепутул интервалулуй ши негативэ ла сфыршит, деоарече функция ла ынчепут креште, яр апой дескреште.

Пе интервалул  $(b;c)$  деривата есте негативэ, деоарече функция дескреште.

Пе интервалул  $(c;d)$  функция есте негативэ ла ынчепутул интервалулуй ши позитивэ ла сфыршитул интервалулуй.

Пе интервалул  $(d;e)$  деривата есте позитивэ, деоарече функция креште.

Ын аша мод, примим кореспонденца А — 2, Б — 1, В — 3 ши Г — 4.

Рэспунс: 2134.

### 10. Стереометрия.

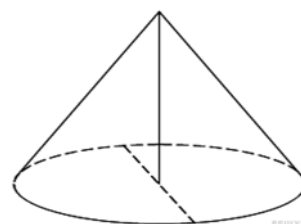
Ынэлцимя конулуй есте егалэ ку 5, яр диаметрул базей – 24. Гэсиць женератоаря конулуй.

*Резолваре.*

Раза конулуй  $R=12$ . Фолосинд теорема луй Питагора, вом гэси лунжимя женератоарей:

$$L = \sqrt{25 + 144} = 13$$

Рэспунс: 13.



### 11. Алежеря версиуней оптимале

Пентру ун груп де оаспець стрэинь требуе де кумпэрат 30 де фой де гид. Фоиле де гид нечесаре с-ау гэсит ын трей интернет-магазине. Прецул фоилор де гид ши кондицииле де ливраре а кумпэрэтурий сынт ын табел.

Интернет-магазинул	Прецул уней фой де гид (руб.)	Прецул ливрэрий (руб.)	Кондиций адэугэтоаре
А	255	350	Ну-с
Б	270	300	Ливраря гратис, дакэ сума комензий депэшеште 8000 р.
В	245	450	Ливраря гратис, дакэ сума комензий депэшеште 7500 р.

**Ла че прец ва фи чя май ефтинэ версиуне де кумпэраре ку ливраре?**

Прекуэутэм тоате версиуниле.

Ла кумпэраря ын магазинул А прецул а трейзечь фой де гид ва алкэтуи 7650 руб., ку ливраре — 8000 руб.

Ла кумпэраря ын магазинул Б прецул а трейзечь фой де гид ва алкэтуи 8100 руб., ливраря ва фи гратис.

Ла кумпэраря ын магазинул В прецул а трейзечь фой де гид ва алкэтуи 7350 руб., ку ливраре — 7800 руб.

Прин урмаре, прецул чел май мик ал кумпэрэтурий ку ливраре алкэтуеште 7800 руб.

*Рэспунс:* 7800.

*Ну уйтаць сэ трансфераць тоате рэспунсуриле ын формуларул ку рэспунсурь № 1*

## ПАРТЯ 2

Рэспунсул ла ынсэрчинэриле 12–15 требуе сэ фие нумэр ын трег сау фракцие зечималэ финитэ. Рэспунсул требуе скрис ын *формуларул ку рэспунсурь № 1* ын партя дряптэ де ла нумэрул ынсэрчинэрий ындеплините, ынчепынд ку примул пэтрэцел. Фиекаре чифрэ, семн минус ши виргулэ скриець ын пэтрэцел апарте ын кореспундере ку моделеле арэтате ын формулар. Унитэциле де мэсурэ ну требуе де скрис.

### 12. Калкуле ши трансформэрь

Гэсиць  $\sin 2\alpha$  дакэ  $\cos \alpha = 0.6$ ,  $\pi < \alpha < 2\pi$

*Резолваре.*

Обсервэм, кэ унгул  $\alpha$  се афлэ ын кадранул патру, синусул луй есте негатив:

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,36} = -0,8.$$

Май департе фолосим формула синусулуй унгулуй дублу:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot (-0,8) \cdot 0,6 = -0,96.$$

*Рэспунс:*  $-0,96$ .

### 13. Стереометрия.

Ын примул вас чилиндрик нивелул ликидулуй атинже 16 чм. Ачест ликид а фост турнат ын ал дойля вас чилиндрик, диаметрул базей кэруя есте де 2 орь май маре декыт диаметрул базей примулуй вас. Ла че ынэлциме се ва афла нивелул ликидулуй ын васул ал дойля? Рэспунсул ыл експримаць ын чм.

**Резолваре.**

Волумул васулуй чилиндрик се експримэ прин диаметрул сэу ши ынэлциме ка  $V = \frac{\pi d^2 h}{4}$ . Ла мэриря диаметрулуй васулуй де 2 орь ынэлцимя волумулуй егал ал ликидулуй  $H = \frac{4V}{\pi d^2}$  се ва микшора де 4 орь ши ва фи егалэ ку 4.

Рэспунс: 4.

**14. Валоаря чя май маре ши чя май микэ а функцией**

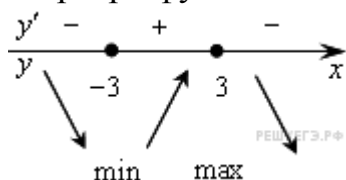
Гэсиць чя май маре валоаре а функцией  $y = 5 + 9x - \frac{x^3}{3}$  пе сегментул [-3;3].

**Резолваре.**

Вом гэси деривата функцией дате:  $y' = 9 - x^2 = (3 - x)(3 + x)$ .

Вом гэси zeroуриле дериватей:  $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = -3. \end{cases}$

Вом детермина семнеле дериватей функцией ши вом арэта пе десен компортаря функцией:



Деривата гэситэ есте ненегативэ пе сегментул дат, функция датэ креште пе ел, дин ачастэ каузэ валоаря чя май маре а функцией пе сегмент есте:

$$y(3) = 5 + 27 - 9 = 23.$$

Рэспунс: 23.

**15. Проблеме де текст**

О баркэ ку мотор а плутит ымпотрива курентулуй рыулуй 112 км ши с-а ынторс ын пунктул де порнире, келтуинд ынапой ку 6 оре май пуцин. Гэсиць витеза курентулуй де апэ, дакэ витеза бэрчий ын апэ стэтэтоаре есте егалэ ку 11 км/орэ. Рэспунсул ыл даць ын км/орэ.

**Резолваре.**

Фие  $u$  км/орэ – витеза курентулуй рыулуй, атунч витеза бэрчий ын дирекция курентулуй есте егалэ ку  $11 + u$  км/орэ, яр витеза бэрчий контра курентулуй есте егалэ ку  $11 - u$  км/орэ. Ын друмул ынторс ынапой барка а келтуит ку 6 оре май пуцин, де аич авем:

$$\frac{112}{11 - u} - \frac{112}{11 + u} = 6 \Leftrightarrow \frac{224u}{(11 - u)(11 + u)} = 6 \Leftrightarrow \frac{112u}{121 - u^2} = 3 \Leftrightarrow_{u > 0}$$

$$\Leftrightarrow 112u = 3(121 - u^2) \Leftrightarrow 3u^2 + 112u - 363 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{-56 + \sqrt{56^2 + 3 \cdot 363}}{3}; \\ v = \frac{-56 - \sqrt{56^2 + 3 \cdot 363}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3; \\ v = -\frac{121}{3} \end{cases} \Leftrightarrow_{v > 0} v = 3.$$

Ын аша мод, витеза курентулуй апей есте егалэ ку 3 км/орэ.

Рэспунс: 3.

*Ну уйтаць сэ трансфераць тоате рэспунсуриле ын формуларул ку рэспунсурь № 1*

**Пентру скриея резолвэрилор ши рэспунсурилор ла ынсэрчинэриле 16-21 фолосиць ФОРМУЛАРУЛ КУ РЭСПУНСУРЬ №2. Скриець май ынтий нумэрул ынсэрчинэрий ындеплините (16,17 ши а.м.д.), яр аной резолваря комплетэ ку лэмурире ши рэспунсул. Рэспунсуриле скриець клар ши читец.**

### 16. Екуаций, системе де екуаций

а) Резолваць екуация  $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

б) Гэсиць тоате рэдэчиниле екуацией дате, че апарцин интервалулуй  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$

**Резолваре.**

а) Трансформэм амбеле пэрць але екуацией:

$$1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(2\sin x - 1) = 0.$$

де унде  $\sin x = 0$  сау  $\sin x = \frac{1}{2}$ .

Дин екуация  $\sin x = 0$  гэсим:  $x = \pi n$ , унде  $n \in \mathbb{Z}$ . Дин

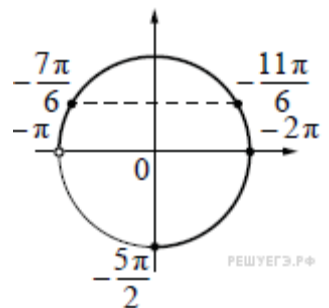
екуация  $\sin x = \frac{1}{2}$  гэсим:  $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$ , унде  $k \in \mathbb{Z}$ .

б) Ку ажуторул чиркумферинцей унитаре селектэм

рэдэчиниле, че апарцин интервалулуй  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$ . Вом

прими нумереле:  $-2\pi; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}$ .

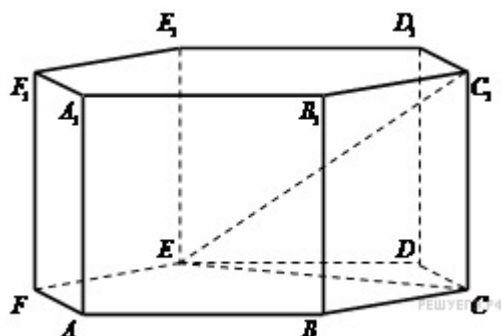
Рэспунс: а)  $\pi n, n \in \mathbb{Z}; (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ . б)  $-2\pi; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}$ .



### 17. Унжурь ши дистанце ын спаицу

Ын призма хексагоналэ регулатэ  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  тоате мукииле кэрея сынт егале ку 10, гэсиць дистанца де ла пунктул  $E$  пынэ ла дряпта  $B_1 C_1$ .

**Резолваре.**



Аша кум  $ABCDEF$  — хексагон регулат, дрептеле  $BC$  ши  $CE$  сынт перпендикуларе. Аша кум дрептеле  $BC$  ши  $B_1 C_1$  сынт паралеле,  $CE$  есте перпендикуларэ ку  $B_1 C_1$ . Атунч дупэ теорема а трей перпендикуларе  $EC_1$  перпендикуларэ  $B_1 C_1$ , дин ачастэ каузэ лунжимя сегментулуй  $EC_1$  есте егалэ ку дистанца кэутатэ.

Дупэ кондицие  $CC_1 = 10$ , диагонала хексагонулуй регулат  $CE = 10\sqrt{3}$ . Атунч дупэ теорема луй Питогаора пентру триунгиол  $ECC_1$  гэсим, кэ  $EC_1 = 20$ .

Рэспунс: 20.



## 18. Инекуаций

### Резолваць системул де инекуаций

$$\begin{cases} 2^x + \frac{80}{2^x} \geq 21, \\ \log_{x-1} \left( \frac{x+1}{5} \right) \leq 0. \end{cases}$$

#### Резолваре.

Обсервэм, кэ  $2^x > 0$  пентру тоате валориле вариабилей, деачея прима инекуацие се поате де ынмулцит ла  $2^x$ , нескимбынд семнул ей, де унде авем:

$$4^x + 80 \geq 21 \cdot 2^x \Leftrightarrow 4^x - 21 \cdot 2^x + 80 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \geq 16, \\ 2^x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4, \\ x \leq \log_2 5. \end{cases}$$

Вом резолва а доуа инекуацие а системулуй, фолосинд теорема деспре семнул логаритмулуй:

$$\log_{x-1} \left( \frac{x+1}{5} \right) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \neq 2, \\ (x-2) \left( \frac{x+1}{5} - 1 \right) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \neq 2, \\ (x-2) \cdot \frac{x-4}{5} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \leq 4.$$

Аша кум  $2 < \log_2 5 < 3$ , примим солуция системулуй де инекуаций инициал:  
 $2 < x \leq \log_2 5, x = 4$ .

Рэспунс:  $(2, \log_2 5] \cup \{4\}$ .

## 19. Проблеме дин планиметрие

Доуэ чиркумферинце сынт тангенте екстериор ын пунктул  $K$ . Дряпта  $AB$  есте тангентэ ла прима чиркумферинцэ ын пунктул  $A$ , яр ла а доуа — ын пунктул  $B$ . Дряпта  $BK$  интерсектязэ прима чиркумферинцэ ын пунктул  $D$ , дряпта  $AK$  интерсектязэ а доуа чиркумферинцэ ын пунктул  $C$ .

а) Демонстраць, кэ дрептеле  $AD$  ши  $BC$  сынт паралеле.

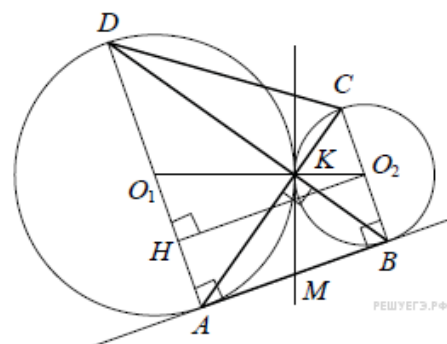
б) Афлаць ария триунгюлуй  $AKB$ , дакэ се куноаште, кэ разеле чиркумферинцелор сынт егале ку 4 ши 1.

#### Резолваре.

а) Нотэм чентреле чиркумферинцелор  $O_1$  ши  $O_2$  кореспунзэтор. Фие тангента комунэ, дусэ ла чиркумферинце прин пунктул  $K$ , интерсектязэ  $AB$  ын пунктул  $M$ . Дупэ проприетатя тангентелор, дусе дин ачелаш пункт,  $AM = KM$  ши  $KM = BM$ . Триунгюл  $AKB$ , ла каре медиана есте егалэ ку жумэтате дин латурэ, ла каре есте дусэ, есте дрептунгик. Унгюл ынскрис  $AKD$  есте дрепт, дин ачастэ каузэ ел се сприжинэ пе диаметрул  $AD$ . Деч,  $AD \perp AB$ . Аналог, примим, кэ  $BC \perp AB$ . Прин урмаре, дрептеле  $AD$  ши  $BC$  сынт паралеле.

б) Фие, пентру кларитате, прима чиркумферинцэ аре раза 4, яр а доуа — раза 1.

Триунгюриле  $BKC$  ши  $AKD$  сынт асеменя,  $\frac{AD}{BC} = 4$ . Фие  $S_{BKC} = S$ , атунач  $S_{AKD} = 16S$ . Триунгюриле  $AKD$  ши  $AKB$  ау ынэлциме комунэ, прин



урмаре,  $\frac{S_{AKD}}{S_{AKB}} = \frac{DK}{KB} = \frac{AD}{BC}$ ; адикэ  $S_{AKB} = 4S$ . Аналог,  $S_{CKD} = 4S$ . Ария трапезулуй  $ABCD$  есте егалэ ку  $25S$ .

Калкулэм ария трапезулуй  $ABCD$ . Дучем кэтре  $AD$  перпендикулара  $O_2H$ , егалэ ку ынэлцимья трапезулуй, ши о афлэм дин триунгиол дрептунгик  $O_2HO_1$ :

$$O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = 4. \quad \text{Атунч}$$

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = 20.$$

Прин урмаре,  $25S = 20$ , де унде  $S = 0,8$  ши  $S_{AKB} = 4S = 3,2$ .

Рэспунс: 3,2.

## 20. Екуаций, инекуаций ши системеле ку параметри

Гэсиць тоате валориле позитиве але луй  $a$ , пентру фиикаре динтре каре системул

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9 \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

аре уника солуцие.

**Резолваре.**

Дакэ  $x \geq 0$ , атунч екуация

$(|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9$  дескрие чиркумферинцэ  $\omega_1$  ку чентрул ын пунктул  $C_1(5; 4)$  раза 3, яр дакэ  $x < 0$ , атунч дескрие чиркумферинцэ  $\omega_2$  ку чентрул ын пунктул  $C_2(-5; 4)$  ку ачеш разэ (везь десенул).

Пентру валорь позитиве але луй  $a$  екуация  $(x + 2)^2 + y^2 = a^2$  дескрие чиркумферинцэ  $\omega$  ку чентрул ын пунктул  $C(-2; 0)$  раза  $a$ . Деачея проблема констэ ын ачеш, де  $a$  гэси тоате валориле луй  $a$ , пентру фиикаре динтре каре чиркумферинца  $\omega$  аре нумай ун пункт комун ку реуниуня чиркумферинцелор  $\omega_1$  ши  $\omega_2$ .

Дин пунктул  $C$  дучем семидряпта  $CC_1$  ши нотэм прин  $A_1$  ши  $B_1$  пунктеле ей де интерсекцие ку чиркумферинца  $\omega_1$ , унде  $A_1$  се афлэ ынтре  $C$  ши  $C_1$ . Аша кум

$$CC_1 = \sqrt{(5 + 2)^2 + 4^2} = \sqrt{65}.$$

атунч  $CA_1 = \sqrt{65} - 3$ ,  $CB_1 = \sqrt{65} + 3$ .

Пентру  $a < CA_1$  сау  $a > CB_1$  чиркумферинцеле  $\omega$  ши  $\omega_1$  ну се интерсектязэ.

Пентру  $CA_1 < a < CB_1$  чиркумферинцеле  $\omega$  ши  $\omega_1$  ау доуэ пункте комуне.

Пентру  $a = CA_1$  сау  $a = CB_1$  чиркумферинцеле  $\omega$  ши  $\omega_1$  сынт тангенте.

Дин пунктул  $C$  дучем семидряпта  $CC_2$  ши нотэм прин  $A_2$  ши  $B_2$  пунктеле ей де интерсекцие ку чиркумферинца  $\omega_2$ , унде  $A_2$  се афлэ ынтре  $C$  ши  $C_2$ . Аша кум

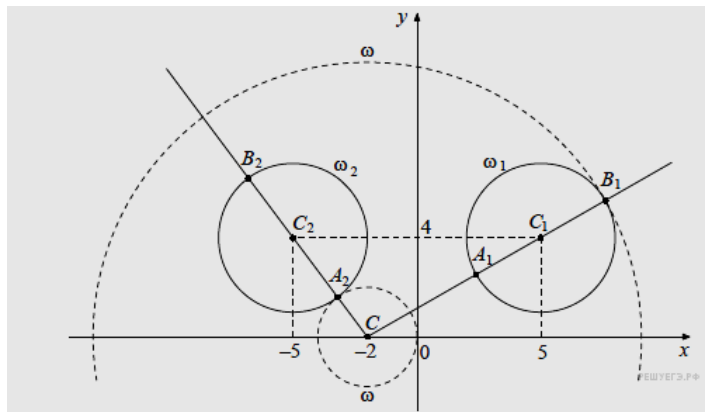
$$CC_2 = \sqrt{(-5 + 2)^2 + 4^2} = 5.$$

атунч  $CA_2 = 5 - 3 = 2$ ,  $CB_2 = 5 + 3 = 8$ .

Пентру  $a < CA_2$  сау  $a > CB_2$  чиркумферинцеле  $\omega$  ши  $\omega_2$  ну се интерсектязэ.

Пентру  $CA_2 < a < CB_2$  чиркумферинцеле  $\omega$  ши  $\omega_2$  ау доуэ пункте комуне.

Пентру  $a = CA_2$  сау  $a = CB_2$  чиркумферинцеле  $\omega$  ши  $\omega_2$  сынт тангенте.



Системул инициал аре уника солуцие атунч ши нумай атунч, кынд чиркумферинца  $\omega$  се атинже нумай де уна дин челе доуэ чиркумферинце  $\omega_1$  ши  $\omega_2$  ши ну се интерсектязэ ку алта. Аша кум  $CA_2 < CA_1 < CB_2 < CB_1$ , атунч кондицией проблемей сатисфак нумай нумереле  $a = 2$ ,  $a = \sqrt{65} + 3$ .

*Рэспунс:* 2;  $\sqrt{65} + 3$ .

### **21. Нумереле ши проприетэциле лор**

**Сынт гындите кытева (ну е облигат диферите) нумере натурале. Ачесте нумере ши тоате сумеле лор посибиле (кыте 2, кыте 3 ши а.м.д.) се скриу пе таблэ ын ордине недескрескэтоаре. Дакэ карева нумэр  $n$ , скрис пе таблэ, се репетэ де кытева орь, атунч пе таблэ се ласэ нумай ун нумэр де аша фел  $n$ , яр челелалте нумере, егале ку  $n$ , се штерг. Де екземплу, дакэ сынт гындите нумереле 1, 3, 3, 4, атунч пе таблэ ва фи скрис сетул 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.**

а) Адучець екземплу де нумере гындите, пентру каре пе таблэ ва фи скрис сетул 3, 6, 9, 12, 15.

б) Екзистэ оаре екземплу де аша нумере гындите, пентру каре пе таблэ ва фи скрис сетул 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 23?

в) Скриець тоате екземплеле де нумере гындите, пентру каре пе таблэ ва фи скрис сетул 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 47.

#### **Резолваре.**

а) Нумереле гындите 3, 3, 3, 3, 3 не дау сетул черут, скрис пе таблэ.

б) Аша кум нумереле гындите сынт натурале, нумэрул чел май мик дин сет — нумэрул чел май мик дин челе гындите, яр чел май маре нумэр дин сет — сума тутурор нумерелор гындите. Принтре нумереле сетулуй скрис требуе сэ фие сума тутурор нумерелор, ын афарэ де чел май мик, адикэ  $23 - 1 = 22$ . Ынсэ ачест нумэр ну есте ын сет, дин ачастэ каузэ ну езистэ екземплу де аша нумере гындите, пентру каре пе таблэ ва фи скрис сетул дин кондицие.

в) Нумэрул 8 — чел май мик нумэр дин сет — есте чел май мик динтре нумереле гындите, яр чел май маре нумэр дин сет — сума тутурор нумерелор гындите. Дин ачастэ каузэ кантитатя нумерелор гындите ну ынтрече партя

ынтрягэ а нумэрулуй  $\frac{47}{8}$  адикэ 5. Ын афарэ де ачаста, нумереле 9 ши 10 сынт май мичь, декыт сума а дой де опт, дин ачастэ каузэ еле деасеменя сынт гындите. Деч, сума нумерелор гындите рэмасе есте егалэ ку  $47 - 8 - 9 - 10 = 20$ . Ын аша мод, аша кум нумэрул чел май мик гындит есте егал ку 8, нумереле гындите рэмасе — 10 ши 10 сау 20 (дакэ 20 се примя ка  $8 + 12$  сау  $9 + 11$ , атунч ерау скрисе нумереле 12 сау 11, ынсэ еле ну сынт). Пентру нумереле гындите 8, 9, 10, 10, 10 ши 8, 9, 10, 20 пе таблэ ва фи скрис сетул, дат ын кондицие. (Пентру нумереле 8, 9, 10, 20 се поате де верификат директ, яр пентру нумереле 8, 9, 10, 10, 10 — де обсерват, кэ вор да фикс ачеляш суме, ка ши нумереле 8, 9, 10, 20.)

*Рэспунс:* а) 3, 3, 3, 3, 3; б) ну; в) 8, 9, 10, 10, 10 сау 8, 9, 10, 20.